DOI:10.17951/h.2017.51.5.221

ANNALES
UNIVERSITATIS MARIAE CURIE-SKŁODOWSKA
LUBLIN – POLONIA
VOL. LI, 5 SECTIO H 2017

Uniwersytet Ekonomiczny w Poznaniu. Wydział Zarządzania

KRZYSZTOF PIASECKI

krzysztof.piasecki@ue.poznan.pl

Oczekiwana stopa zwrotu z portfela finansowego – przypadek trójkątnych rozmytych wartości bieżących

Expected Rate of Return from Financial Portfolio – the Case of Triangular Fuzzy Present Value

Słowa kluczowe: portfel finansowy; wartość bieżąca; liczba rozmyta; stopa zwrotu

Keywords: financial portfolio; present value; fuzzy number; return rate

Kod JEL: C44; C02; G10

Wstęp

Zgodnie z ustawą o rachunkowości „instrumentem finansowym jest kontrakt, który powoduje powstanie aktywów finansowych u jednej ze stron i zobowiązania finansowego u drugiej strony” [Ustawa z dnia 24 września 1994 r.]. Oznacza to, że instrument finansowy daje wierzycielowi uprawnienie do przyszłego przychodu finansowego wymagalnego w ściśle określonym terminie wymagalności. Z posiadaniem instrumentu finansowego jest związane ryzyko utraty posiadanego bogactwa. Nieprecyzyjne oceny korzyści płynących z posiadania instrumentu finansowego są naturalną przyczyną ryzyka obarczającego instrumenty finansowe.

Wartość przyszłego przychodu z tytułu posiadania instrumentu finansowego interpretujemy jako antycypowaną wartość przyszłą (w skrócie FV) tego instrumentu. Zgodnie z tezą o niepewności [Mises, 1962; Kaplan, Barish, 1967] każdy przyszły nieznany nam stan rzeczy jest niepewny. Niepewność w ujęciu Misesa i Kaplana jest skutkiem braku naszej wiedzy o przyszłym stanie rzeczy. W rozpatrywanym przypadku można jednak określić ten przyszły moment czasu, w którym rozpatrywany stan rzeczy będzie już nam znany. Ten rodzaj niepewności Misesa i Kaplana nazywany jest w skrócie niepewnością. Jest to warunek wystarczający do tego, aby modelem niepewności było prawdopodobieństwo [Kolmogorow, 1933; Mises, 1957; Lambalgen, 1996; Sadowski, 1997; Czerwiński, 1969; Caplan, 2001]. Z tego powodu niepewność określa się też niepewnością kwantyfikowalną. Warto tutaj zauważyć, że FV nie jest obciążona niepewnością Knighta [1921]. Wszystko to prowadzi do stwierdzenia, że FV jest zmienną losową.

Punktem odniesienia do oceny instrumentu finansowego jest jego wartość bieżąca (w skrócie PV), zdefiniowana jako teraźniejszy ekwiwalent płatności dostępnej w ustalonym momencie. Powszechnie jest obecnie akceptowany pogląd, że PV przyszłych przepływów finansowych może być wartością przybliżoną. Konsekwencją takiego podejścia jest ocena PV za pomocą liczb rozmytych. Odzwierciedleniem tych poglądów było zdefiniowanie rozmytej PV jako zdyskontowanej rozmytej prognozy wartości przyszłego przepływu finansowego [Ward, 1985]. Koncepcja zastosowania liczb rozmytych w arytmetyce finansowej wywodzi się od Buckleya [1987]. Definicja Warda jest uogólniona w pracach Chiu i Parka [1994] oraz Greenhut, Normana i Temponi [1995] do przypadku nieprecyzyjnie oszacowanego odroczenia. Sheen [2005] rozwija definicję Warda do przypadku rozmytej stopy nominalnej. Buckley [1987], Gutierrez [1989], Kuchta [2000] i Lesage [2001] dyskutują problemy związane z zastosowaniem rozmytej arytmetyki do wyznaczania rozmytej PV. Huang [2007b] rozwija definicję Warda do przypadku, kiedy przyszły przepływ finansowy jest dany jako rozmyta zmienna losowa. Bardziej ogólna definicja rozmytej PV jest proponowana przez Tsao [2005], który zakłada, że przyszły przepływ finansowy jest określony jako rozmyty zbiór probabilistyczny. Wszyscy ci autorzy przedstawiają PV jako dyskonto nieprecyzyjnie oszacowanej wartości przyszłego przepływu finansowego. Odmienne podejście zostało zaprezentowane w pracach Piaseckiego [2011a, 2011b] oraz Piaseckiego i Siwek [2015], gdzie rozmytą PV oceniono na podstawie bieżącej ceny rynkowej instrumentu finansowego. Pod pojęciem portfela finansowego autor rozumie dowolny, skończenie elementowy zbiór instrumentów finansowych. Każdy portfel finansowy jest instrumentem finansowym i w związku z tym jest oceniany w ten sam sposób, jak jego składniki. W pracy Markowitza [1952] przedstawiono przypadek prostej stopy zwrotu, gdzie PV jest dodatnią liczbą rzeczywistą, natomiast FV jest zmienną losową o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa. Drogą dedukcji matematycznej wykazano tam między innymi, że stopa zwrotu z portfela jest średnią ważoną stóp zwrotu z jego poszczególnych składników.

Praca Markowitza [1952] stanowi punkt wyjścia do rozwoju teorii portfelowej. Głównie na rozwój tej teorii miała wpływ teoria zbiorów rozmytych [Zadeh, 1965]. Dostrzegano problem nieprecyzyjnych ocen stóp zwrotu i ograniczeń. Zaowocowało to powstaniem wielu rozmytych modeli portfela finansowego. Kompetentnym źródłem informacji o tych modelach są opracowania Fang, Lai i Wanga [2008] oraz Gupty i in. [2014]. Badania nad przedstawionymi modelami są nadal kontynuowane [por. prace: Huang, 2007a; Duan, Stahlecker, 2011; Li, Jin, 2011; Wu, Liu, 2012; Liu, Zhang, 2013; Zhang, Zhang, Xiao, 2013; Mehlawat, 2016; Guo i in., 2016; Saborido i in., 2016].

Istotną wadą wszystkich cytowanych powyżej prac jest zdefiniowanie *ex cathedra* rozmytej stopy zwrotu z portfela jako kombinacji liniowej stóp zwrotu z jego poszczególnych składników. Jedynym uzasadnieniem takiego stanu rzeczy było mechaniczne uogólnienie modelu Markowitza do przypadku rozmytego. Uogólnienie to nie było uzasadnione drogą dedukcji. Osłabia to wiarygodność prowadzonych obliczeń.

Jedną ze wspólnych cech łączących wszystkie wymienione powyżej prace jest stosowanie funkcji przynależności zbiorów rozmytych jako substytutu rozkładu prawdopodobieństwa. Oznacza to, że losowość w tych modelach jest zastępowana przez nieprecyzyjność.

Prace Piaseckiego [2011a, 2011b], Siwek [2015] oraz Piaseckiego i Siwek [2017] nie mieszczą się w tym nurcie badawczym, ponieważ w opisanych tam modelach funkcja przynależności nie zastępuje rozkładu prawdopodobieństwa, lecz wchodzi z tym rozkładem w interakcje. To rozszerzenie modelu w istotny sposób wzbogaca możliwości rzetelnego opisu stopy zwrotu. Pomimo uwzględnienia nieprecyzji w oszacowaniu stopy zwrotu, w zaproponowanym rozmytym modelu można wykorzystać bez zmian całą bogatą empiryczną wiedzę zebraną na temat rozkładów prawdopodobieństwa stóp zwrotu. Jest to wysoce korzystna cecha zaproponowanego modelu, gdyż przybliża możliwość jego realnych zastosowań. Losowość w tych modelach wchodzi w interakcję z nieprecyzyjnością.

Obecnie rozwijane są badania według obu wymienionych wyżej paradygmatów. Modeli uwzględniających interakcję losowości z nieprecyzyjnością jest niestety mniej. Najprawdopodobniej wynika to z faktu ich wyższej złożoności matematycznej. Na niwie finansów skwantyfikowanych do tego nurtu badawczego możemy zaliczyć prace Tsao [2005], Huang [2007b], Siwek [2015] oraz Piaseckiego i Siwek [2017], z czego do analizy portfelowej odnoszą się jedynie dwie ostatnie.

W pracy Siwek [2015] przedstawiono przypadek prostej stopy zwrotu, gdzie PV jest rozmytą liczbą trójkątną, natomiast FV to zmienna losowa o normalnym rozkładzie prawdopodobieństwa. W ten sposób jako punkt wyjścia wybrano założenie o normalnym rozkładzie prostej stopy zwrotu, przyjęte w opracowaniu Markowitza [1952]. Za opisaniem PV za pomocą trójkątnej liczby rozmytej przemawiają wyniki dyskusji przeprowadzonej w pracach: Buckleya [1987], Gutierrez [1989], Kuchty [2000] i Lesage'a [2001]. Narzędziem stosowanym do oceny korzyści z posiadania instrumentu finansowego była rozmyta oczekiwana stopa zwrotu. Zastosowano tutaj arytmetykę liczb rozmytych. W wyniku tej analizy uzyskano zależności tak bardzo skomplikowane, że uniemożliwiało to dalszą formalną analizę właściwości portfela.

Alternatywne rozwiązanie tego problemu zaproponowano w pracy Piaseckiego i Siwek [2017], gdzie oczekiwaną stopę zwrotu zastąpiono oczekiwanym czynnikiem dyskonta. Następnie wykazano, że rozmyty oczekiwany czynnik dyskonta portfela jest średnią ważoną rozmytych oczekiwanych czynników dyskonta poszczególnych składników portfela. Dzięki temu do zadania wyboru portfela można zastosować rozmyty program liniowy.

Celem niniejszego opracowania jest przedstawienie odmiennego podejścia do wyznaczenia rozmytej oczekiwanej stopy zwrotu z portfela opisanego w pracy Siwek [2015]. Do wyznaczenia rozmytej stopy zwrotu wykorzystamy tym razem definicję prostej stopy zwrotu.

1. Wybrane elementy teorii liczb rozmytych

Za pomocą symbolu $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ oznaczamy rodzinę wszystkich podzbiorów rozmytych w prostej rzeczywistej $\mathbb{R}$. Dubois i Prade [1979] definiują liczbę rozmytą jako podzbiór rozmyty $L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ o ograniczonym nośniku, reprezentowany przez swą funkcję przynależności $\mu_L \in [0;1]^{\mathbb{R}}$ spełniającą warunki:

$$\exists_{x\in\mathbb{R}}\, \mu_L(x) = 1 \tag{1}$$

$$\forall_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3}: x \le y \le z \Longrightarrow \mu_L(y) \ge \min\{\mu_L(x), \mu_L(z)\} \tag{2}$$

Zgodnie z zasadą rozszerzenia Zadeha suma liczb rozmytych $K, L \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest liczbą rozmytą

$$G = K \oplus L \tag{3}$$

opisaną przez funkcję przynależności:

$$\mu_G(z) = \sup\{\mu_K(x) \wedge \mu_L(z-x): x \in \mathbb{R}\} \tag{4}$$

W tej pracy szczególną uwagę poświęcimy rozmytej liczbie trójkątnej $T(r,s,u)$, wyznaczonej dla dowolnych licz rzeczywistych $r \le s \le u$ za pomocą funkcji przynależności $\mu(\cdot\,|r,s,u)$, określonej na nośniku liczby następująco:

$$\mu(x|r,s,u) = \begin{cases} \frac{1}{s-r}\cdot(x-r) & r \le x < s \\ 1 & x = s \\ \frac{1}{s-u}\cdot(x-u) & s < x \le u \end{cases} \tag{5}$$

Podstawową zaletą liczb trójkątnych jest prostota ich dodawania, gdyż mamy:

$$T(r_1+r_2, s_1+s_2, u_1+u_2) = T(r_1,s_1,u_1) \oplus T(r_2,s_2,u_2) \tag{6}$$

2. Stopa zwrotu z instrumentu finansowego

Dla ustalonego momentu $t > 0$ rozważać będziemy prostą stopę zwrotu r z danego instrumentu finansowego, zdefiniowaną za pomocą zależności:

$$r(\omega) = \frac{V_t(\omega) - V_0}{V_0} \tag{7}$$

gdzie:
$\omega \in \Omega$ – stan elementarny rynku finansowego
V_t – FV opisana za pomocą zmiennej losowej $\tilde{V}_t\colon \Omega \to \mathbb{R}$
V_0 – PV oszacowana w sposób dokładny lub przybliżony

Za Markowitzem [1952] zakładamy, że prosta stopa zwrotu $r\colon \Omega \to \mathbb{R}$, wyznaczona dla PV równej cenie rynkowej $\check{C}$, ma normalny rozkład prawdopodobieństwa $N(\bar{r}, \sigma)$. W tym artykule – podobnie jak w pracy Siwek [2015] – zakładamy dodatkowo, że PV jest oszacowana jako rozmyta liczba trójkątna $T\left(\check{C}_{min}; \check{C};\ \check{C}_{max}\right)$ reprezentowana za pomocą (5) przez swą funkcję przynależności $\mu\left(\cdot \middle| \check{C}_{min}; \check{C};\ \check{C}_{max}\right)$, gdzie:

– $\check{C}_{min} \leq \check{C}$ jest maksymalnym dolnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej,
– $\check{C} \leq \check{C}_{max}$ jest minimalnym górnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej.

W pracy Piaseckiego i Siwek [2017] pokazano, że w tej sytuacji oczekiwana stopa zwrotu $R \in \mathcal{F}(\mathbb{R})$ jest liczbą rozmytą daną za pomocą funkcji przynależności $\rho\left(\cdot \middle| \bar{r}, \check{C}_{min}; \check{C};\ \check{C}_{max}\right)$ określonej na swym nośniku przez tożsamość:

$$\rho\left(r \middle| \bar{r}, \check{C}_{min}; \check{C};\ \check{C}_{max}\right) = \begin{cases} \dfrac{\frac{1+\bar{r}}{1+r} - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}}{1 - \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}}} & \frac{\check{C}_{min}}{\check{C}} \leq \frac{1+\bar{r}}{1+r} < 1 \\ 1 & \frac{1+\bar{r}}{1+r} = 1 \\ \dfrac{\frac{1+\bar{r}}{1+r} - \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}}{1 - \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}}} & 1 < \frac{1+\bar{r}}{1+r} \leq \frac{\check{C}_{max}}{\check{C}} \end{cases} \tag{8}$$

3. Portfel finansowy

Rozważmy teraz przypadek portfela finansowego π złożonego z n instrumentów finansowych $Y_i (i = 1,2, \dots, n)$. Za Markowitzem [1952] zakładamy, że dla każdego instrumentu Y_i jego prosta stopy zwrotu $r_i\colon \Omega \to \mathbb{R}$, wyznaczona dla PV równej cenie rynkowej $\check{C}_i$, ma rozkład normalny $N(\bar{r}_i, \sigma_i)$. Załóżmy, że PV instrumentu Y_i jest równa trójkątnej liczbie rozmytej $T\left(\check{C}_{min}^{(i)}, \check{C}_i, \check{C}_{max}^{(i)}\right)$, gdzie:

– $\check{C}_{min}^{(i)}$ jest maksymalnym dolnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej instrumentu finansowego Y_i,
– $\check{C}_{max}^{(i)}$ jest minimalnym górnym oszacowaniem możliwej ceny rynkowej instrumentu finansowego Y_i.

Rozmyta oczekiwana stopa zwrotu z instrumentu Y_i jest wtedy wyznaczona przez funkcję przynależności $\rho\left(\cdot \middle| \bar{r}, \check{C}_{min}^{(i)}; \check{C}_i; \check{C}_{max}^{(i)}\right)$ opisaną za pomocą (8).

Cena rynkowa portfela π wynosi:

$$\check{C}_\pi = \sum_{i=1}^{n} \check{C}_i \tag{9}$$

Oczekiwana stopa zwrotu $\bar{r}$ z portfela jest równa:

$$\bar{r}_\pi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\check{C}_i}{\check{C}} \cdot \bar{r}_i \tag{10}$$

Maksymalne dolne oszacowanie możliwej ceny rynkowej portfela π jest równe:

$$\check{C}_{min}^{(\pi)} = \sum_{i=1}^{n} \check{C}_{min}^{(i)} \tag{11}$$

Minimalne górne oszacowanie możliwej ceny rynkowej portfela π jest równe:

$$\check{C}_{max}^{(\pi)} = \sum_{i=1}^{n} \check{C}_{max}^{(i)} \tag{12}$$

Zgodnie z (6) PV portfela π jest równe trójkątnej liczbie rozmytej $T\left(\check{C}_{min}^{(\pi)}; \check{C}_\pi; \check{C}_{max}^{(\pi)}\right)$. Wtedy rozmyta oczekiwana stopa zwrotu z portfela π jest jednoznacznie wyznaczona przez funkcję przynależności $\rho\left(\cdot \middle| \bar{r}_\pi, \check{C}_{min}^{(\pi)}; \check{C}_\pi; \check{C}_{max}^{(\pi)}\right)$ opisaną za pomocą (8).

4. Numeryczna ilustracja modelu

W pracy Piaseckiego i Siwek [2017] portfel π złożono z instrumentów finansowych Y_1 i Y_2.

PV instrumentu Y_1 jest określona za pomocą trójkątnej liczby rozmytej $\mathrm{T}(50; 90; 110)$. Przewidywana stopa zwrotu $r_1: \Omega \to \mathbb{R}$ z instrumentu Y_1 jest zmienną losową z rozkładem normalnym $N(0{,}25; 0{,}5)$. Wtedy, zgodnie z (8), oczekiwana stopa zwrotu z instrumentu Y_1 jest liczbą rozmytą daną za pomocą funkcji przynależności:

$$\rho(\cdot\,|0{,}25; 50; 90; 110) = \begin{cases} \frac{2{,}25}{1+r} - 1, 1{,}25 \geq r > 0{,}25 \\ 1, r = 0{,}25 \\ \frac{-5{,}625}{1+r} + 5{,}5\ 0{,}25 > r \geq 0{,}0227 \end{cases} \tag{13}$$

PV instrumentu Y_2 jest określona jako trójkątna liczba rozmyta $\mathrm{T}(90; 96; 144)$. Przewidywana stopa $r_2: \Omega \to \mathbb{R}$ zwrotu z instrumentu Y_2 jest zmienną losową z rozkładem normalnym $N(0{,}5; 0{,}4)$. Wtedy, zgodnie z (8), oczekiwana stopa zwrotu z instrumentu Y_2 jest liczbą rozmytą daną za pomocą swej funkcji przynależności:

$$\rho(\cdot\,|0{,}5;90;96;144) = \begin{cases} \frac{24}{1+r} - 15, 0{,}6 \geq r > 0{,}5 \\ 1, r = 0{,}5 \\ \frac{-3}{1+r} + 3\ 0{,}5 > r \geq 0 \end{cases} \tag{14}$$

Zgodnie z (9), (11), (12) PV portfela π jest trójkątną liczbą rozmytą:

$$PV = T(50+90; 90+96;\ 110+144) = T(140; 186; 254) \tag{15}$$

Zgodnie z (10) oczekiwana stopa zwrotu z portfela π jest równa:

$$r_\pi = \frac{90}{186} \cdot 0{,}25 + \frac{96}{186} \cdot 0{,}5 = 0{,}3790 \tag{17}$$

Wtedy, zgodnie z (8), oczekiwana stopa zwrotu z portfela π jest liczbą rozmytą daną za pomocą swej funkcji przynależności:

$$\rho(\cdot\,|0{,}3790;140;186;254) = \begin{cases} \frac{5{,}5807}{1+r} - 3{,}0469, 0{,}8316 \geq r > 0{,}3790 \\ 1, r = 0{,}3790 \\ \frac{-3{,}7720}{1+r} + 3{,}7353\ 0{,}3790 > r \geq -0.0097 \end{cases} \tag{18}$$

W pracy Piaseckiego i Siwek [2017] wyznaczono oczekiwany czynnik dyskonta portfela π jako rozmytą liczbę trójkątną $T(0{,}5458; 0{,}7252; 0{,}9923)$. Korzystając z tej wartości, wyznaczamy dla portfela π jego rozmytą oczekiwaną stopę zwrotu daną za pomocą funkcji przynależności:

$$\rho_\pi(r) = \begin{cases} \frac{5{,}5741}{1+r} - 3{,}0423\ 0{,}8321 \geq r > 0{,}3789 \\ 1\ r = 0{,}3789 \\ \frac{-3{,}7439}{1+r} + 3{,}7151\ 0{,}3789 > r \geq 0{,}0078 \end{cases} \tag{19}$$

Jest wyraźnie widoczne, że w rozważanym przypadku oczekiwana stopa zwrotu wyznaczona w tym opracowaniu jest niemal równa oczekiwanej stopie zwrotu wyznaczonej za pomocą metody opisanej w pracy Piaseckiego i Siwek [2017]. Z punktu widzenia praktyki finansowej można stwierdzić, że obie oceny oczekiwanej stopy zwrotu są identyczne.

Podsumowanie

Zaprezentowana tutaj metoda wyznaczania nieprecyzyjnie oszacowanej oczekiwanej stopy zwrotu portfela charakteryzuje się dużą prostotą obliczeń. Ma to jednak swoją cenę. Zaproponowana metoda nie pozwala przedstawić oczekiwanej stopy zwrotu z portfela jako kombinacji liniowej oczekiwanych stóp zwrotu z jego poszczególnych składników. W tej sytuacji zastosowanie rozmytego programu liniowego do wyboru składu portfela jest tutaj niemożliwe. Pozostaje jedynie zarządzanie składem portfela za pomocą oczekiwanego czynnika dyskonta [Piasecki, Siwek, 2017].

Z drugiej strony ustalony portfel instrumentów finansowych jest instrumentem finansowym. Zdecydowana większość strategii zarządzania instrumentem finansowym wykorzystuje wartość oczekiwanej stopy zwrotu z zarządzanego instrumentu. W pracy Piaseckiego [2011b] pokazano, jak można te strategie adaptować dla przypadku instrumentu finansowego z rozmytą PV. W tej sytuacji korzystanie z rozmytej oczekiwanej stopy zwrotu, wyznaczonej metodą opisaną w niniejszym artykule, pozwoli w efektywny sposób adaptować wspomniane powyżej strategie do przypadku zarządzania portfelem z PV daną jako trójkątna liczba rozmyta.

Spostrzeżenia te prowadzą do sformułowania następujących zaleceń dla zarządzania portfelem instrumentów z PV danymi jako trójkątne liczby rozmyte:

- skład portfela określamy, stosując zadanie programowania liniowego minimalizujące rozmyty oczekiwany czynnik dyskonta portfela,
- ustalonym portfelem zarządzamy, stosując metody wykorzystujące rozmytą oczekiwaną stopę zwrotu z portfela.

W przedstawionym studium przypadku pokazano, że oczekiwana stopa zwrotu wyznaczona w tej pracy jest niemal identyczna z oczekiwaną stopą zwrotu wyznaczoną za pomocą metody opisanej w pracy Piaseckiego i Siwek [2017]. Jest to bardzo interesujące spostrzeżenie, które w trakcie dalszych badań formalnych należy potwierdzić i uogólnić.

Uzyskane tutaj wyniki badań zachęcają do ich kontynuacji. Sugerowanym kierunkiem przyszłych badań może być uogólnienie przedstawienia PV na przypadek rozmytej liczby trapezoidalnej.

Bibliografia

Buckley I.J., *The fuzzy mathematics of finance*, "Fuzzy Sets and Systems" 1987, Vol. 21, **DOI: https://doi.org/10.1016/0165-0114(87)90128-X**.

Caplan B., *Probability, common sense, and realism: a reply to Hulsmann and Block*, "The Quarterly Journal of Austrian Economics" 2001, Vol. 4(2).

Chiu C.Y., Park C.S., *Fuzzy Cash Flow Analysis Using Present Worth Criterion*. "The Engineering Economist" 1994, Vol. 39(2), **DOI: https://doi.org/10.1080/00137919408903117**.

Czerwiński Z., *Matematyka na usługach ekonomii*, PWN, Warszawa 1969.

Duan L., Stahlecker P., *A portfolio selection model using fuzzy returns*, "Fuzzy Optimization and Decision Making" 2011, Vol. 10(2), **DOI: https://doi.org/10.1007/s10700-011-9101-x**.

Dubois D., Prade H., *Fuzzy real algebra: some results*, "Fuzzy Sets and Systems" 1979, Vol. 2, **DOI: https://doi.org/10.1016/0165-0114(79)90005-8**.

Fang Y., Lai K.K., Wang S., *Fuzzy Portfolio Optimization. Theory and Methods*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 609, Springer, Berlin 2008.

Greenhut J.G., Norman G., Temponi C., *Towards a fuzzy theory of oligopolistic competition*, IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS, 1995.

Guo S., Yu L., Li X., Kar S., *Fuzzy multi-period portfolio selection with different investment horizons*, "European Journal of Operational Research" 2016, Vol. 254(3), **DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2016.04.055**.

Gupta P., Mehlawat M.K., Inuiguchi M., Chandra S., *Fuzzy Portfolio Optimization, Advances in Hybrid Multi-criteria Methodologies*, Studies in Fuzziness and Soft Computing 316, Springer, Berlin 2014.

Gutierrez I., *Fuzzy numbers and Net Present Value*, "Scand. J. Mgmt." 1989, Vol. 5(2), **DOI: https://doi.org/10.1016/0956-5221(89)90021-3**.

Huang X., *Portfolio selection with fuzzy return*, "Journal of Intelligent & Fuzzy Systems" 2007a, Vol. 18(4).

Huang X., *Two new models for portfolio selection with stochastic returns taking fuzzy information*, "European Journal of Operational Research" 2007b, Vol. 180(1), **DOI: https://doi.org/10.1016/j.ejor.2006.04.010**.

Kaplan S., Barish N.N., *Decision-Making Allowing Uncertainty of Future Investment Opportunities*, "Management Science" 1967, Vol. 13(10), B569-B577.

Knight F.H., *Risk, Uncertainty, and Profit*, Hart, Schaffner & Marx, Houghton Mifflin Company, Boston MA 1921.

Kolmogorov A.N., *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, Julius Springer, Berlin 1933, **DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-642-49888-6**.

Kuchta D., *Fuzzy capital budgeting*, "Fuzzy Sets and Systems" 2000, Vol. 111, **DOI: https://doi.org/10.1016/s0165-0114(98)00088-8**.

Lambalgen M. von, *Randomness and foundations of probability: von Mises' axiomatization of random sequences*, Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes – Monograph Series 30, Springer, Berlin 1996.

Lesage C., *Discounted cash-flows analysis. An interactive fuzzy arithmetic approach*, "European Journal of Economic and Social Systems" 2001, Vol. 15(2), **DOI: https://doi.org/10.1051/ejess:2001115**.

Li C., Jin J., *Fuzzy Portfolio Optimization Model with Fuzzy Numbers*, Advances in Intelligent and Soft Computing 100, Springer, Berlin 2011.

Liu Y.-J., Zhang W.-G., *Fuzzy portfolio optimization model under real constraints*, "Insurance: Mathematics and Economics" 2013, Vol. 53(3), **DOI: https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2013.09.005**.

Markowitz H.S.M., *Portfolio Selection*, "Journal of Finance" 1952, Vol. 7(1), **DOI: https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x**.

Mehlawat M.K., *Credibilistic mean-entropy models for multi-period portfolio selection with multi-choice aspiration levels*, "Information Science" 2016, Vol. 345, **DOI: https://doi.org/10.1016/j.ins.2016.01.042**.

Mises L. von, *The Ultimate Foundation of Economic Science An Essay on Method*, D. Van Nostrand Company, Inc., Princeton 1962.

Mises R. von, *Probability, statistics and truth*, The Macmillan Company, New York 1957.

Piasecki K., *Behavioural present value*, "SSRN Electronic Journal" 2011a, **DOI: https://doi.org/10.2139/ssrn.1729351**.

Piasecki K., *Rozmyte zbiory probabilistyczne jako narzędzie finansów behawioralnych*, Wydawnictwo UE, Poznań 2011b, **DOI: https://doi.org/10.13140/2.1.2506.6567**.

Piasecki K., Siwek J., *Behavioural Present Value Defined as Fuzzy Number – a New Approach*, "Folia Oeconomica Stetinensia" 2015, Vol. 23(2), **DOI: https://doi.org/10.1515/foli-2015-0033**.

Piasecki K., Siwek J., *Oczekiwana stopa zwrotu z portfela – przypadek trójkątnych rozmytych wartości bieżących*, „Przegląd Statystyczny" 2017, t. 64.

Saborido R., Ruiz A.B., Bermúdez J.D., Vercher E., Luque M., *Evolutionary multi-objective optimization algorithms for fuzzy portfolio selection*, "Applied Soft Computing" 2016, Vol. 39, **DOI: https://doi.org/10.1016/j.asoc.2015.11.005**.

Sadowski W., *Decyzje i prognozy*, PWN, Warszawa 1997.

Sheen J.N., *Fuzzy financial profitability analyses of demand side management alternatives from participant perspective*, "Information Sciences" 2005, Vol. 169, **DOI: https://doi.org/10.1016/j.ins.2004.05.007**.

Siwek J., *Portfel dwuskładnikowy – studium przypadku dla wartości bieżącej danej jako trójkątna liczba rozmyta*, „Studia Ekonomiczne. Zeszyty Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego w Katowicach" 2015, z. 241.

Tsao C.-T., *Assessing the probabilistic fuzzy Net Present Value for a capital. Investment choice using fuzzy arithmetic*, "Journal of Chinese Institute of Industrial Engineers" 2005, Vol. 22(2), **DOI: https://doi.org/10.1080/10170660509509282**.

Ustawa z dnia 24 września 1994 r. o rachunkowości (Dz.U. 2017, nr 0, poz. 1089 z późn. zm.).

Ward T.L., *Discounted fuzzy cash flow analysis*, Fall Industrial Engineering Conference Proceedings, 1985.

Wu X.-L., Liu Y.K., *Optimizing fuzzy portfolio selection problems by parametric quadratic programming*, "Fuzzy Optimization and Decision Making" 2012, Vol. 11(4), **DOI: https://doi.org/10.1007/s10700-012-9126-9**.

Zadeh L., *Fuzzy sets*, "Information and Control" 1965, Vol. 8, **DOI: https://doi.org/10.1016/s0019-9958(65)90241-x**.

Zhang X., Zhang W.-G., Xiao W., *Multi-period portfolio optimization under possibility measures*, "Economic Modelling" 2013, Vol. 35, **DOI: https://doi.org/10.1016/j.econmod.2013.07.023**.

Expected Rate of Return from Financial Portfolio – the Case of Triangular Fuzzy Present Value

The main aim of this article is to present an uncomplicated method of estimating return rate on a portfolio of securities with Present Values presented as triangular fuzzy numbers. Determined return rates on the securities are not triangular fuzzy numbers. Despite this, we achieved a solution that is based on the arithmetic of triangular fuzzy numbers. The whole considerations are illustrated by a numerical example.

Oczekiwana stopa zwrotu z portfela finansowego – przypadek trójkątnych rozmytych wartości bieżących

Głównym celem artykułu jest przedstawienie nieskomplikowanej metody szacowania stopy zwrotu z portfela instrumentów finansowych o wartościach bieżących przedstawionych jako trójkątne liczby rozmyte. Wyznaczone stopy zwrotu z poszczególnych składników nie są trójkątnymi liczbami rozmytymi. Pomimo tego uzyskano takie rozwiązanie, które bazuje na arytmetyce trójkątnych liczb rozmytych. Całość rozważań zilustrowano przykładem numerycznym.